第二章　习题课

1　导数和微分的概念及应用

2　导数和微分的求法

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

一、 导数和微分的概念及应用

- 导数： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  当$\Delta x\to 0^+$时，为右导数 $f'_+(x)$

  当$\Delta x\to 0^-$时，为左导数 $f'_-(x)$

- 微分： $d\,f(x)=f'(x)\,dx$

- 关系：可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

- 应用：

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)' = 0; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2)用导数定义求极限

(3)微分在近似计算与误差估计中的应用

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

例1 设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线的斜率为______

例　设$f'(x_0)$存在,求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例2 若$f(1)=0$, $f'(1)$存在，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

例3 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$,试确定常数$a,b$使$f(x)$处处可导,并求$f'(x)$.

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

二、导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论分段点处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 $\longrightarrow$ 对数求导法

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳；

间接求导法; 利用莱布尼兹公式.

南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

例4 设$y=e^{\sin x}\sin e^{x}+f(\arctan\frac{1}{x})$,其中$f(x)$可微,求$y'$。

例5 设$x \le 0$时$g(x)$有定义,且$g''(x)$存在,问怎样选择a,b,c可使得下述函数在$x=0$处有二阶导数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x>0 \\ g(x), & x\le 0 \end{cases}$$

例6 设由方程$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \quad (0 < \varepsilon < 1) \end{cases}$

确定函数$y = y(x)$，求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

例 7 求由方程 $x^y + y^x = 1$ 所确定隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

补充

(1). $\frac{d}{dx}[f(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{x}$,则$f'(\frac{1}{2})=$ ______.

(2). $\varphi(x)$是单调连续函数 $f(x)$ 的反函数，且$f(1)=2$,

若$f'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则$\varphi'(2)=$ ______.

(3). 设$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0.3\Delta x+\ln^2(1+\Delta x)$,则________

(A) $f(x)$在x_0可微，$dy=0.3\Delta x.$　　(B)　不可微

(C) $f(x)$在x_0可微, $dy\neq 0.3\Delta x.$

3.求下列函数的导数.

(1) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$,

(2). 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

(3). $y=\sqrt[x]{x}+\sqrt{x\sin x\sqrt{e^x-1}}$, $(x>0)$求y'.

(4). $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$, 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5). $y=\arctan\dfrac{2x}{1+x^2}$, 求$dy$.

(6)试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$中导出：$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

求下列函数的n阶导数.

方法1 化简函数,利用已知的n阶导数公式

例1 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

方法2 利用莱布尼兹公式

例2 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.